

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
”SPIRU HARET”**

**EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023**

**Filiera teoretică: Profilul real - Științe ale naturii**

**CLASA A XII - A**

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{X_a = I_2 + aA, a > -1\}$ .
  - a) Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian.
  - b) Demonstrați că funcția  $f : G \rightarrow \mathbb{R}, f(X_a) = \ln(a + 1)$  este izomorfism de la grupul  $(G, \cdot)$  la grupul  $(\mathbb{R}, \cdot)$ .
  - c) Arătați că  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n = X_{(n+1)!-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .
2. Să se determine primitivele funcțiilor:
  - a)  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x^{2023}+1)}$ .
  - b)  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x$ .
  - c)  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ .
3. Fie  $f = X^3 - X + 1, g = X^5 - 5X^4 + X^3 + 15X^2 - 3X - 9, f, g \in \mathbb{R}[X]$ 
  - a) Dacă  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile lui  $f$ , să se calculeze  $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$ .
  - b) Să se determine rădăcinile lui  $g$ .
4. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ , se consideră funcția  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (1 - x)^n$ .
  - a) Să se calculeze  $\int_0^1 f_3(x) dx$ .
  - b) Să se arate că  $\int_0^1 x f_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
  - c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right) dx$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.**

**Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**