

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
”SPIRU HARET”**

**EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023**

**Filiera teoretică: Profilul real - Științe ale naturii**

**CLASA A X - A**

1. a) Arătați că  $\{\log_3 54\} - \{\log_3 18\}$  este număr natural, unde  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului  $a$ .  
b) Arătați că  $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6$ .  
c) Calculați  $\log_6 16$  în funcție de  $a = \log_{12} 3$ .
2. Se consideră funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_{\sqrt{3}-1}(7 - 2\sqrt{x} - x)$ .  
a) Determinați domeniul de definiție al funcției.  
b) Determinați punctul de pe graficul funcției care are ambele coordonate numere naturale.  
c) Rezolvați ecuația  $f(x) = 0$ .
3. a) Rezolvați ecuația:  $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$ .  
b) Rezolvați ecuația:  $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} + 3$ .
4. Se consideră mulțimea  $A \subset \mathbb{C}$ , împreună cu următoarele proprietăți:  
(I)  $i \in A$   
(II) Dacă  $z \in A$ , atunci  $1 + z^2 \in A$   
(III) Dacă  $1 + z \in A$ , atunci  $z \in A$ .  
a) Arătați că  $1 - 2i \in A$  și  $5 \in A$ .  
b) Se consideră mulțimea  $M_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = \bar{z}^2\}$ . Determinați elementele mulțimii  $M_1$  și arătați că mulțimea  $M_2$  are o infinitate de elemente.

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.**

**Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**