

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”**

EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera teoretică: Profilul real - Științe ale naturii

CLASA A IX - A

1. a) Să se arate că $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.
b) Calculați suma $S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
c) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $[S_{n+1}] = [S_n] + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x .

2. Se consideră expresia:

$$E(x) = 6 \cdot \left\{ \frac{x+13}{2x+2} \right\} \cdot \left\{ \frac{2x+22}{3x-3} \right\} - 4 \cdot \left\{ \frac{x+13}{2x+2} \right\} - 3 \cdot \left\{ \frac{2x+22}{3x-3} \right\} + 2,$$

unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a .

- a) Calculați $E(-\frac{5}{2})$.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $E(x) = 0$.
3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 > 0$ și $r > 0$. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice.

- a) Folosind, eventual, metoda inducției matematice, demonstrați egalitatea:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

- b) Dacă există două numere naturale k și l nenule și diferite între ele pentru care $S_k = S_l$, atunci calculați S_{k+l} .
c) Calculați suma $S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2023}$ în funcție de a_1 și r .
4. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră un punct D astfel încât $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$. Se notează cu E mijlocul segmentului AB , iar cu F mijlocul medianei din C .
a) Calculați vectorii \overrightarrow{AD} și \overrightarrow{AF} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} .
b) Arătați că punctele A, F, D sunt coliniare.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.