

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”**

EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera teoretică: Profilul real - Științe ale naturii

CLASA A XI - A

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- a) Arătați că $d = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.
- b) Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu toate elementele pozitive, astfel încât elementele de pe diagonală principală să fie egale între ele, iar produsul elementelor de pe fiecare linie și fiecare coloană să fie egal cu 1. Arătați că $\det(A) \geq 0$.
- c) Se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, unde $n \in \mathbb{N}$. Arătați că pentru orice numere m, n, p naturale, distincte două câte două, aria $\triangle A_m A_n A_p$ este număr natural.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = Ax$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calculați $f^2(x)$ și $f^3(x)$.
- b) Determinați $f^{2023}(1)$.
- c) Rezolvați în mulțimea \mathbb{R}^* ecuația:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2021 \\ 1 \end{pmatrix} = (2023) \text{ , unde } (2023) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}).$$

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2mx + n}{x^2 + 1}$, cu $m, n \in \mathbb{R}$.
- a) Arătați că există două puncte ale graficului funcției f în care tangenta este paralelă cu axa Ox și că produsul absciselor celor două puncte este egal cu -1 .
- b) Determinați valorile parametrilor reali m, n știind că $f(1) = 2$ și $f'(2) = 0$.
- c) Determinați valorile parametrilor reali m, n știind că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) , & x < m \\ n , & x = m \\ 2n + 4 , & x > m \end{cases} \quad \text{este continuă în } x = m.$$

4. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ și P un punct care aparține graficului funcției f și care are abscisa t , $t > \sqrt{2}$. Notăm cu r tangenta la graficul funcției f în punctul P .
- a) Pentru $t = 2$, arătați că r este paralelă cu dreapta de ecuație $2x + 8y - 3 = 0$.
- b) Exprimați în funcție de t aria S_1 a triunghiului OPA , unde A este punctul de intersecție al tangentei cu axa Oy .
- c) Fie d dreapta perpendiculară pe r în punctul P , punctul B aflat la intersecția dreptei d cu axa Ox și S_2 aria triunghiului OPB . Calculați:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2}$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.