

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
”SPIRU HARET”**

**EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023**

**Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și  
protecția mediului**

**CLASA A XI - A**

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$ .
  - a) Arătați că, oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $X(a) \cdot X(0) = X(a)$  și  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 10ab)$ .
  - b) Fie  $H = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{10}\}\}$ . Arătați că dacă  $X(a), X(b) \in H$ , atunci  $X(a) \cdot X(b) \in H$ .
  - c) Rezolvați ecuația:  $X^2 = I_2$ , unde  $X \in G$ .
2. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu laturile  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  și sistemul 
$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}.$$
  - a) Să se rezolve sistemul în cazul  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$ .
  - b) Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.
  - c) Știind că soluția sistemului este  $(x_0, y_0, z_0)$ , să se demonstreze că  $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$ .
3. Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - a) Să se determine  $a$  și  $b$  știind că  $P(0, 1)$  aparține graficului funcției  $f$  și că tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul  $P$  este paralelă cu axa  $Ox$ .
  - b) Pentru  $a = 1$  și  $b = -1$ , determinați aria dreptunghiului format de tangenta la grafic în punctul de abscisă  $x = 2$ , asimptota verticală a funcției și axele de coordonate.
4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculați
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^3(x)}{(x^2 + 1)f(x)}.$$
  - b) Determinați asimptota oblică a graficului funcției  $f$  spre  $+\infty$ .
  - c) Determinați  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $f^2(x) \cdot f'(x) = x^2 + mx$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.**

**Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**