

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”**

EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023

**Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și
protecția mediului**

CLASA A X - A

1. a) Determinați mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2(2^x - 1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{2^x - 1}{9}\}$.
b) Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2 \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1 \end{cases}.$$

- c) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a > b > 0$ și $a^2 + b^2 = 23ab$. Arătați că:

$$\ln \frac{1}{5}(a+b) = \ln \frac{1}{\sqrt{21}}(a-b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$$

2. Se consideră funcția $f : (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\log_x 3 \cdot \log_x 9} + \cdots + \frac{1}{\log_x 3^{2023} \cdot \log_x 3^{2024}}$$

- a) Arătați că $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) Calculați $f(3)$.
c) Arătați că funcția dată este injectivă, dar nu este surjectivă.
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$, $f(x) = 3^x$.
- a) Arătați că $f(0) + f(-1) + \cdots + f(-100) < \frac{1}{2}f(1)$.
b) Rezolvați ecuația $f(2\sqrt{x}) + 3 = 4f(\sqrt{x})$.
c) Demonstrați că pentru orice numere reale a, b , cu $a > b$ are loc relația:

$$af(a) + bf(b) \geq bf(a) + af(b).$$

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

- a) Arătați că $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$ și că $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$.
b) Calculați $\frac{1}{z_1^{2023}} + \frac{1}{z_2^{2023}} + \frac{1}{z_3^{2023}}$.
c) Arătați că numărul $z = \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1 z_2 z_3}$ este număr real.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.