

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”**

EDIȚIA A XXII-A, 20 MAI 2023

**Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale și
protecția mediului**

CLASA A XII - A

1. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale se consideră legea de compoziție ” $*$ ” definită prin:

$$x * y = xy - 3(x + y) + 12, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Arătați că mulțimea $M = (2, 4)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea ” $*$ ”.
- b) Arătați că $26 < xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) < 28, \forall x, y, z \in (2, 4)$.
- c) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2023 de ori}} = x$

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X + m$, unde $m \in \mathbb{R}$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

- a) Pentru $m = 2$, determinați rădăcinile polinomului f .
- b) Arătați că pentru orice $m \in \mathbb{R}, x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 18 = 0$.
- c) Determinați valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care f are toate rădăcinile întregi.

3. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln^2 x$.

- a) Determinați primitiva funcției f al cărei grafic are în punctul de abscisă $x_0 = e$ tangenta $y = ex$.
- b) Se consideră funcția $g : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x^2 \ln x}$. Aflați numărul real $a > e$ pentru care aria subgraficului delimitat de dreptele $x = e, x = a$ și graficul funcției g este $\frac{3}{2}$.
- c) Calculați:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$$

4. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ continuă cu proprietatea că $f(x) = f(1 - x), \forall x \in [0, 1]$. Arătați că:

- a) $\int_0^1 \frac{x+f(x)}{1+2f(x)} dx = \frac{1}{2}$.
- b) $\int_0^1 \frac{2x-1}{1+2f(x)} dx = 0$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.